

Révisions d'optimisation (L1)

1 Optimisation d'une fonction d'une variable

On souhaite optimiser une fonction $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$.

Condition nécessaire d'optimalité (CNO)

Si f admet un **extremum** en $x_0 \in U$, alors

$$f'(x_0) = 0$$

Une valeur x_0 vérifiant cette condition est appelée **valeur** (ou point) **critique**.

Exemple

On souhaite optimiser la fonction $f(x) = x^4 - 32x^2 + 150$ sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 4x^3 - 64x$. La CNO donne

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 64x = 0 \iff 4x(x^2 - 16) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4 \text{ ou } x = -4$$

La fonction f admet donc 3 points critiques.

Condition suffisante d'optimalité du 2nd ordre (CSO)

Soit x_0 un point critique pour f .

- Si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un **maximum local** en x_0 .
- Si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un **minimum local** en x_0 .

Exemple (suite)

On a $f''(x) = 12x^2 - 64$. On utilise la condition suffisante d'optimalité pour déterminer la nature de chaque point :

$$f''(0) = -64 < 0 \implies f \text{ admet un maximum local en } x = 0$$

$$f''(2) = 128 > 0 \implies f \text{ admet un minimum local en } x = 4$$

$$f''(-2) = 128 > 0 \implies f \text{ admet un minimum local en } x = -4$$

Condition suffisante : le cas convexe/concave

Si la fonction $f(x)$ est convexe (resp. concave), alors la condition nécessaire $f'(x) = 0$ est suffisante. La fonction f admet un minimum (resp. un maximum) **global** aux points critiques.

Exemple

On souhaite optimiser la fonction $f(x) = x^2 - 2x$. On a $f''(x) = 2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

La CNO donne

$$f'(x) = 0 \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1$$

La fonction f admet donc un unique point critique $x_0 = 1$. Comme la fonction f est convexe, elle admet un minimum global en $x_0 = 1$. Ce minimum est $f(1) = -1$.

Condition suffisante : étude directe

On étudie le signe de $\Delta f = f(x) - f(x_0)$:

- si $\Delta f \leq 0$ alors f admet un **maximum** en x_0 .
- si $\Delta f \geq 0$ alors f admet un **minimum** en x_0 .

Si le signe de Δf est constant pour tout $x \in U$, l'extremum est **global**.

Si le signe de Δf est constant uniquement pour x dans un voisinage de x_0 , l'extremum est **local**.

2 Optimisation d'une fonction de 2 variables

On souhaite à présent optimiser une fonction de deux variables f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Conditions nécessaires d'optimalité (CNO)

Si f admet un extremum en $(x_0, y_0) \in U$, alors

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \iff \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Un point (x_0, y_0) vérifiant ces conditions est appelé **point critique**.

Exemple

On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = 12xy - 2x^3 - 3y^2$. Les CNO donnent

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12y - 6x^2 = 0 \\ 12x - 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - x^2 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 4 \\ y = 0 \text{ ou } y = 8 \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques $(0, 0)$ et $(4, 8)$.

Matrice hessienne d'une fonction de deux variables

La matrice hessienne d'une fonction de deux variables est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Le hessien de f est le déterminant de la matrice hessienne :

$$\det H_f(x_0, y_0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) \times f''_{y^2}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0) \times f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Exemple (suite)

La hessienne et le hessien de f sont

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -12x & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x, y) = (-12x) \times (-6) - 12 \times 12 = 72x - 144$$

Conditions suffisantes d'optimalité du 2nd ordre (CSO)

Soit (x_0, y_0) un point critique pour f .

- Si $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ et $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$, alors f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) .
- Si $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ et $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$, alors f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) .
- Si $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0) (**point col**).
- Lorsque $\det H_f(x_0, y_0) = 0$, il faut étudier plus précisément le signe de Δf .

Exemple (suite)

On applique les CSO aux deux points critiques :

- au point $(0, 0)$, $\det H_f(0, 0) = -144 < 0$. Il s'agit donc d'un point *col* : pas d'extremum.
- au point $(4, 8)$, $\det H_f(4, 8) = 144 > 0$, $f''_{x^2}(4, 8) = -48 < 0$ et $f''_{y^2}(4, 8) = -6 < 0$. La fonction admet donc un maximum local au point $(4, 8)$.

Conditions suffisantes : cas convexe/concave

Si la fonction $f(x, y)$ est convexe (resp. concave), alors les conditions nécessaires $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ sont suffisantes. La fonction f admet un minimum (resp. un maximum) **global** aux points critiques.

Exemple

On souhaite optimiser la fonction $f(x, y) = x^2 - 2x + y^4$. On remarque que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions convexes d'une variable ($x \mapsto x^2 - 2x$) et ($y \mapsto y^4$). Les CNO donnent

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

La fonction f admet donc un unique point critique $(1, 0)$. Comme f est convexe sur $\mathbb{R}^2$, elle admet un minimum global en $(1, 0)$. Ce minimum est $f(1, 0) = -1$.

Conditions suffisantes : étude directe

Etude du signe de $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$:

- si $\Delta f < 0$, f admet un **maximum** en (x_0, y_0) .
- si $\Delta f > 0$, f admet un **minimum** en (x_0, y_0) .

Si le signe de Δf est constant pour tout $(x, y) \in U$, l'extremum est **global**.

Si le signe de Δf est constant uniquement pour $(x, y) \in V(x_0, y_0)$, l'extremum est **local**.

3 Optimisation sous contrainte

On souhaite finalement optimiser une fonction de deux variables sous une contrainte du type $g(x, y) = 0$:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) \\ \text{sous la contrainte } g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Le **lagrangien** associé au problème (P) est

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Conditions nécessaires d'optimalité (CNO)

Si (P) admet un extremum en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ alors, en général, il existe λ_0 tel que

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}$$

Un point (x_0, y_0) vérifiant ces conditions est appelé **point critique**.

Exemple

On souhaite résoudre le problème

$$(P) \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = xy \\ \text{sous la contrainte } x + 2y = 4 \end{cases}$$

La contrainte peut s'écrire $x + 2y - 4 = 0$. Le lagrangien associé au problème (P) est donc

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + 2y - 4)$$

Les CNO donnent

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\lambda \\ x = -2\lambda \\ (-2\lambda) + 2(-\lambda) - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un unique point critique $(x_0, y_0) = (2, 1)$ avec $\lambda_0 = -1$.

Conditions suffisantes d'optimalité du 2nd ordre (CSO) – HORS PROGRAMME

Soit (x_0, y_0) un point critique pour (P) avec $\lambda = \lambda_0$.

- Si $\det H_{\mathcal{L}}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, alors (P) admet un **maximum local** en (x_0, y_0) .
- Si $\det H_{\mathcal{L}}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, alors (P) admet un **minimum local** en (x_0, y_0) .
- Si $\det H_{\mathcal{L}}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, alors on ne peut pas conclure. Il faut étudier directement le signe de Δf .

Exemple (suite)

La hessienne du lagrangien est

$$H_f(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det H_f(x, y, \lambda) = 2 + 2 = 4$$

On a $\det H_f(x_0, y_0, \lambda_0) = 4 > 0$ donc le problème (P) admet un maximum local en $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

Conditions suffisantes : cas convexe/concave

Si la fonction $f(x, y)$ est convexe (resp. concave) **et** si la fonction $g(x, y)$ est affine ($= ax + by + c$), alors les conditions nécessaires sont suffisantes. Le problème (P) admet un minimum (resp. un maximum) **global** aux points critiques trouvés.

Exemple

On souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 3x^2 + y^2 \\ \text{sous la contrainte } 2x - y = 7 \end{cases}$$

La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions convexes d'une seule variable : $x \mapsto 3x^2$ (avec $(3x^2)'' = 6 \geq 0$) et $y \mapsto y^2$ (avec $(y^2)'' = 2 \geq 0$).

Le lagrangien associé au problème (P) est $L(x, y, \lambda) = 3x^2 + y^2 + \lambda(2x - y - 7)$. Les CNO donnent

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 2\lambda = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{2\lambda}{3} - \frac{\lambda}{2} - 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{7\lambda}{6} = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ \lambda = -6 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un point candidat $(x_0, y_0) = (2, -3)$ avec $\lambda_0 = -6$. Comme la fonction objectif f est convexe et que la contrainte est affine, les CNO sont suffisantes. Le problème (P) admet donc un minimum global en $(x_0, y_0) = (2, -3)$

Conditions suffisantes : étude directe

Etude du signe de $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ en tenant compte de la contrainte $g(x, y) = 0$.

Méthode alternative : Substitution

Lorsque la contrainte $g(x, y)$ permet d'exprimer y en fonction de x :

$$y = y(x)$$

le problème (P) est équivalent au problème d'optimisation de la fonction d'une variable

$$h(x) = f(x, y(x))$$

Exemple

Reprenons le premier exemple de la section :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = xy \\ \text{sous la contrainte } x + 2y = 4 \end{cases}$$

Sous la contrainte $x + 2y = 4$, on a

$$y = 2 - \frac{1}{2}x \implies f(x, y) = f\left(x, 2 - \frac{1}{2}x\right) = x\left(2 - \frac{1}{2}x\right) = 2x - \frac{1}{2}x^2 = h(x)$$

On résout alors le problème d'optimisation de h :

$$h(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 \implies h'(x) = 2 - x \quad h'(x) = 0 \iff x = 2 \quad h''(x) = -1 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction h admet $x_0 = 2$ comme point critique. Comme la fonction h est concave, elle admet un maximum global en $x_0 = 2$. Par conséquent, le problème (P) admet un maximum global en $(x_0, y_0) = (2, 2 - \frac{1}{2} \times 2) = (2, 1)$.

4 Compléments : Convexité

Ensemble convexe

On dit que $C \subset \mathbb{R}^2$ est **convexe** si pour tous $M_1, M_2 \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2 \in C$$

avec $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$.

Fonction convexe

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble convexe. On dit qu'une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si pour tout $M_1, M_2 \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2) \leq \lambda f(M_1) + (1 - \lambda)f(M_2)$$

On dit que f est **concave** si $-f$ est convexe :

$$f(\lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2) \geq \lambda f(M_1) + (1 - \lambda)f(M_2)$$

Remarques

1. La somme de fonctions convexes (resp. concaves) est convexe (resp. concave).
2. Si $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ avec f_1 et f_2 convexes (resp. concaves), alors f est convexe (resp. concave).

Exemple

Soit $f(x, y) = x^2 + 2y^4 - x$. On a

$$f(x, y) = [x^2 - x] + [2y^4] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x \mapsto x^2 - x & \text{convexe sur } \mathbb{R} \\ y \mapsto 2y^4 & \text{convexe sur } \mathbb{R} \end{cases} \implies f(x, y) \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^2$$

Fonction convexe

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $C \subset \mathbb{R}^2$, alors

$$f \text{ est convexe} \iff \begin{cases} \det H_f(x, y) \geq 0 \\ f''_{x^2}(x, y) \geq 0 \\ f''_{y^2}(x, y) \geq 0 \end{cases} \iff H_f(x, y) \text{ est **semi-définie positive**.}$$

en tout $(x, y) \in C$.

Exemple

Soit $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - y \\ f'_y(x, y) = -x + 4y \end{cases} \implies H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \implies \det H_f(x, y) = 7$$

Comme

$$f''_{x^2}(x, y) = 2 \geq 0 \quad f''_{y^2}(x, y) = 4 \geq 0 \quad \det H_f(x, y) = 7 \geq 0$$

la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Fonction concave

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $C \subset \mathbb{R}^2$, alors

$$f \text{ est concave} \iff \begin{cases} \det H_f(x, y) \geq 0 \\ f''_{x^2}(x, y) \leq 0 \\ f''_{y^2}(x, y) \leq 0 \end{cases} \iff H_f(x, y) \text{ est **semi-définie négative**.}$$

en tout $(x, y) \in C$.