

Licence Économie-Gestion - 1^{re} année
Mathématiques appliquées S1
Feuille d'exercices n° 1

Dérivées usuelles

$f(x)$	c	$ax + b$	x^n	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	0	a	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$	e^x	$\frac{1}{x}$
$f(x)$	$u \times v$	$\frac{u}{v}$	u^n	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{u^n}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}$	e^u	$\ln u$
$f'(x)$	$u'v + uv'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$nu'u^{n-1}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-\frac{u'}{2\sqrt{u^3}}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

Exercice 1

On considère les trois fonctions $f(x) = x - 5$, $g(x) = 3 - \frac{1}{2}x$ et $h(x) = 3x - 3$.

- 1) Représenter ces fonctions sur un même graphique.
- 2) Quelle est la pente de chaque droite obtenue?
- 3) Que pouvez-vous dire de la croissance de chacune de ces fonctions?

Exercice 2

Représenter graphiquement chacune de ces droites, déterminer leur pente ainsi que leur équation.

- 1) la droite passant par les points (1, 2) et (5, 1);
- 2) la droite passant par le point (1, 2) et de pente 1/3;
- 3) la droite ayant une pente nulle et passant par le point (1, 3);
- 4) la droite ayant une pente infinie et passant par le point (2, 1);

Exercice 3

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x$.

- 1) Déterminer la dérivée de f et calculer $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Calculer le taux de variation (τ) de f entre $x = 0$ et $x = 3$.
- 4) Faire une représentation graphique de $f(x)$ et interpréter les trois valeurs $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ et τ .

Exercice 4

- 1) La dérivée d'une fonction f croît de $f'(0) = 0.25$ à $f'(2) = 1$ et $f'(4) = 2$. Donner l'allure du graphe de f . Quelle information vous manque-t-il pour obtenir un graphique plus précis?
- 2) La dérivée de g décroît de $g'(0) = 2$ à $g'(1) = 1$ et $g'(2) = 0$ puis croît jusqu'à $g'(3) = 1.5$. Donner l'allure du graphe de g . Admet-elle un maximum ou un minimum?

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x \quad f_2(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2 \quad f_3(x) = (x-3)(x+3) \quad f_4(x) = x(x-2)^2$$

$$g_1(x) = xe^x \quad g_2(x) = (x+1)\sqrt{x} \quad g_3(x) = x^3e^x \quad g_4(x) = x^2 \ln(x^2)$$

$$h_1(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \quad h_2(x) = \frac{2-x^4}{x} \quad h_3(x) = \frac{x-2}{x^2+2} \quad h_4(x) = \frac{e^x}{x} \quad h_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$k_1(x) = \sqrt{2x} \quad k_2(x) = \sqrt{1+x^2} \quad k_3(x) = e^{2x} - e^{x^2} \quad k_4(x) = \ln(1+x^3) \quad k_5(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Exercice 6

Étudier la convexité des fonctions suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$f(x) = x^4 - 3x \quad g(x) = \ln(x) \quad h(x) = x^3 - x \quad i(x) = \frac{1}{x^2} \quad j(x) = \sqrt{2x} \quad k(x) = e^{-x} \quad \ell(x) = e^{x^2}$$

Exercice 7

Déterminer les extremums des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 - 3x \quad g(x) = 5x^2 - 5x - 3 \quad h(x) = x^5 - 20x^2 \quad i(x) = e^{x^2} \quad j(x) = xe^{-x}$$

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = 8x^2 - x^4 + 3$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- 3) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
- 4) Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.
- 5) Construire le tableau de variations de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s)
- 6) Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux?

Exercice 9

Soit f la fonction d'une variable définie par $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$.

- 1) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
- 2) Déterminer les extremums de $f(x)$.
- 3) Construire le tableau de variation de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f .
- 4) Les extremums de f sont-ils globaux?

Exercice 10 (★)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ un réel strictement positif et $f(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - \lambda x^2 + 1$.

- 1) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
- 2) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de $f(x)$.
- 3) Déterminer la nature de(s) point(s) critique(s).
- 4) Que pouvez-vous dire lorsque $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ est strictement négatif?
- 5) Que se passe-t-il lorsque $\lambda = 0$?